

Ευκλείδης Γ' Γυμνασίου 2000-2001

1. α) Να αποδείξετε ότι:
$$\frac{2}{v(v+1)(v+2)} = \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v+1}\right) - \left(\frac{1}{v+1} - \frac{1}{v+2}\right).$$

β) Να υπολογιστεί το άθροισμα
$$\Sigma = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{1999 \cdot 2000 \cdot 2001}.$$

2. Για τους αριθμούς α, β, x, y ισχύει $xy - \alpha\beta = 1$.

Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 + \beta^2 + x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y > 1$.

3. α) Να παραγοντοποιηθεί η παράσταση $x^4 + 4y^4$.

β) Αν οι αριθμοί x, y είναι θετικοί ακέραιοι με $y \geq 2$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $x^4 + 4y^4$ είναι σύνθετος.

4. Στο σχήμα έχουμε: (α) το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές

(β) $A\Delta = x, AE = y, A\Gamma = 2x + y$

(γ) Το ΔEZH είναι τετράγωνο με $(\Delta EZH) = \frac{2}{5}(AB\Gamma)$.

Να υπολογίσετε: 1) το λόγο $\frac{x}{y}$ και 2) το λόγο $\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)}$.

