

Ευκλείδης Γ' Λυκείου 2000-2001

1. Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma$ . Ένας κύκλος που έχει χορδή τη  $B\Gamma$  τέμνει την πλευρά  $AB$  στο μέσον της  $\Delta$  και την πλευρά  $A\Gamma$  στο  $E$ . Γράφουμε και τον κύκλο  $(\gamma)$  που έχει χορδή τη  $\Gamma E$  και εφάπτεται της  $B\Gamma$  στο  $\Gamma$ . Η  $\Delta E$  προεκτεινόμενη τέμνει την ευθεία  $B\Gamma$  στο  $Z$  και τον κύκλο  $(\gamma)$  στο  $H$ .

Να αποδείξετε ότι οι ευθείες  $ZA$ ,  $BE$  και  $\Gamma H$  περνάνε από το ίδιο σημείο.

2. Έστω η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = \frac{12(ax+36)}{x^2+36}$ , ο  $a$  είναι ακέραιος.

Να βρεθούν οι τιμές του  $a$  για τις οποίες η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της  $f$  είναι ακέραιοι αριθμοί.

3. Για  $x, y, z > 0$  να αποδειχτεί ότι:

$$\alpha) \frac{x^3 + y^3}{x^2 + xy + y^2} \geq \frac{x + y}{3}$$

$$\beta) f(x, y, z) = \frac{x^3}{x^2 + xy + y^2} + \frac{y^3}{y^2 + yz + z^2} + \frac{z^3}{z^2 + zx + x^2} \geq \frac{x + y + z}{3} .$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

4. Δύο μαθητές  $A$  και  $B$  παίζουν το ακόλουθο παιχνίδι:

Πάνω σε ένα κύκλο δίνονται 100 διαφορετικά σημεία και οι δύο μαθητές διαδοχικά ο ένας μετά τον άλλο γράφουν μια χορδή, διαφορετική κάθε φορά, με άκρα δύο οποιαδήποτε από τα 100 δεδομένα σημεία. Το παιχνίδι τελειώνει όταν καθένα από τα 100 σημεία χρησιμοποιηθεί ως άκρο χορδής μία τουλάχιστον φορά. Νικητής είναι ο μαθητής ο οποίος θα γράψει τη χορδή με την οποία τελειώνει το παιχνίδι.

Αν ο μαθητής  $A$  αρχίσει πρώτος, ποιος από τους δύο μαθητές έχει στρατηγική νίκης; (δηλαδή ποιος από τους δύο μαθητές μπορεί να παίξει έτσι, ώστε να νικήσει, ανεξαρτήτως του πως θα παίξει ο άλλος;)