

1. Να βρείτε όλες τις τιμές του  $a \in \mathbb{R}$  για τις οποίες το σύστημα  $(\Sigma): \begin{cases} x^2 + y^2 + 2x \leq 1 \\ x - y + a = 0 \end{cases}$  έχει μοναδική λύση και για τις τιμές αυτές να το λύσετε.

2. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A} = 90^\circ$ . Από σημείο  $\Delta$  της πλευράς  $AB$  φέρνουμε δύο ευθείες που χωρίζουν το τρίγωνο  $AB\Gamma$  σε τρία τρίγωνα ίσα μεταξύ τους.

Να δείχτεί ότι:

1) Το σημείο  $\Delta$  είναι εσωτερικό σημείο της πλευράς  $AB$ , δηλαδή δεν είναι ένα από τα άκρα του.

2)  $\hat{B} = 30^\circ$ .

3. Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A} < 90^\circ$ . Φέρνουμε ευθύγραμμο τμήμα  $A\Delta$  κάθετο και ίσο προς την πλευρά  $AB$  καθώς και ευθύγραμμο τμήμα  $AE$  κάθετο και ίσο προς την πλευρά  $AG$ , έτσι ώστε  $\angle A\hat{A}E < 90^\circ$ .

Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από το  $A$  και το μέσον της  $BE$  είναι κάθετη προς την ευθεία  $\Gamma\Delta$ .

4. Στην Ε.Μ.Ε. γίνονται μαθήματα προετοιμασίας για τις Διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες για τους 20 μαθητές που προκρίνονται στην τελική φάση. Διδάσκονται 4 μαθήματα: Γεωμετρία, Θεωρία αριθμών, Συνδυαστική, Άλγεβρα.

Δήλωσαν συμμετοχή: στη Γεωμετρία 15 μαθητές, στη Θεωρία αριθμών 13, στη Συνδυαστική 14 και στην Άλγεβρα 19 μαθητές.

Να αποδείξετε ότι ένας τουλάχιστον μαθητής δήλωσε συμμετοχή και στα 4 μαθήματα.