

Ευκλείδης Γ' Γυμνασίου 2002-2003

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή των μη αρνητικών ακεραίων αριθμών α, β με $\alpha > \beta$, ο αριθμός $\kappa = \frac{(2\alpha+1)^2 - (2\beta+1)^2}{4}$ είναι ακέραιος.

Να προσδιορίσετε τις τιμές των α, β για τις οποίες ο κ είναι πρώτος, δηλαδή $\kappa > 1$ και οι μοναδικοί θετικοί διαιρέτες του είναι οι αριθμοί 1 και κ .

2. Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $AB = A\Gamma = a$.

Φέρνουμε ευθεία $\chi A \gamma$ έτσι ώστε $\chi \hat{A} \Gamma = 30^\circ$. Από τα Γ και B φέρνουμε κάθετες προς την $\chi A \gamma$ που την τέμνουν στα Δ και E , αντίστοιχα.

Να υπολογίσετε το εμβαδό του τραπεζίου $B\Gamma\Delta E$ συναρτήσει του a .

3. Για τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z, w ισχύει: $x^2 + 10y^2 + 10z^2 + 9w^2 = 6(xy + yz + zw)$.

Να βρεθεί η σχέση που συνδέει τους x και w .

4. Είναι δυνατόν το γινόμενο τριών διαδοχικών θετικών ακεραίων να ισούται με τον κύβο ενός θετικού ακεραίου;