

1. Να λύσετε στο σύνολο των πραγματικών αριθμών την εξίσωση

$$(E): (9x^2 - 3x + 3)(4y^2 + 12y + 29) = 55.$$

2. Έστω α, β θετικοί ακέραιοι με $1 \leq \beta \leq \alpha$. Θεωρούμε και τους αριθμούς

$$A = (\sqrt{\alpha^2 + \beta} - \alpha)^2, \quad B = (\sqrt{\alpha^2 + \beta} + \alpha)^2.$$

Να δειχτεί ότι:

1) Ο αριθμός $\sqrt{\alpha^2 + \beta}$ είναι άρρητος.

2) Ο αριθμός A είναι άρρητος με $0 < A < 0,25$.

3) Ο αριθμός B είναι άρρητος με δεκαδικό μέρος μεγαλύτερο του 0,75.

3. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ πλευράς a και σημεία Δ, E και Z πάνω στις

πλευρές $B\Gamma, \Gamma A$ και AB αντίστοιχα, έτσι ώστε $\Gamma\Delta = \frac{a}{3}$, E μέσον της ΓA και $Z A = \frac{3a}{3}$.

Να βρεθεί η γωνία $\hat{\Delta E Z}$.

4. Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με $B\Gamma < AB < 2B\Gamma$. Στις πλευρές $AB, B\Gamma$ και $\Gamma\Delta$ παίρνουμε τα σημεία M, P και N , αντίστοιχα, τέτοια ώστε $MB = \Gamma P = \Delta N = AB - B\Gamma$.

1) Να βρεθεί η γωνία $\hat{P A N}$.

2) Να αποδείξετε ότι $\hat{N M \Gamma} > \frac{\pi}{4}$.