Ευκλείδης Γ' Γυμνασίου 2003-2004

1. Αν $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq \pm 1$ και οι πραγματικοί αριθμοί x, y είναι τέτοιοι ώστε

$$\frac{x+y}{1+\alpha^2}=\frac{1-\alpha^2+\alpha^4}{x^2-xy+y^2}, \qquad \frac{x-y}{1-\alpha^2}=\frac{1+\alpha+\alpha^2}{x^2+xy+y^2}.$$

Να υπολογίσετε την τιμή του x.

2. Να εξεταστεί, αν υπάρχουν ακέραιοι α, β που να ικανοποιούν την εξίσωση:

$$(E): \alpha^2+\beta^2=2003.$$

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΑΒ=6, ΒΓ=8 και διάμεσο ΑΜ.

Η μεσοκάθετη της διαμέσου ΑΜ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο Ε.

Οι ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ είναι ανάλογες των πλευρών ΕΜ, ΜΓ και ΕΓ του τριγώνου ΕΜΓ αντίστοιχα.

Να υπολογιστεί το μήκος της πλευράς ΑΓ.

4. Οι πραγματικοί αριθμοί α, β είναι τέτοιοι ώστε α>0, β>1 και $\alpha\beta+1=\beta^2+\beta+\alpha.$

Να προσδιορίσετε την ελάχιστη δυνατή τιμή του α.