

Ευκλείδης Γ' Λυκείου 2003-2004

1. Οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, x, \gamma, z$ ικανοποιούν τις ισότητες

$$\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2 \text{ και } x^2 + \gamma^2 = z^2.$$

Να αποδείξετε ότι ικανοποιούν και τη σχέση $(\alpha+x)^2 + (\beta+\gamma)^2 \leq (\gamma+z)^2$.

Πότε ισχύει η ισότητα;

2. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $\Gamma\Delta=6$ και $AB=x$, όπου x θετικός ακέραιος. Οι διαγώνιοι $A\Gamma$ και $B\Delta$ τέμνονται στο E . Η παράλληλη από το E προς τις βάσεις τέμνει τις $A\Delta$ και $B\Gamma$ στα σημεία Z και H αντίστοιχα.

Να προσδιορίσετε τις τιμές του x για τις οποίες το μήκος του ZH είναι θετικός ακέραιος.

3. Σε κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{A}\Gamma\Delta$ που τέμνει τη $B\Delta$ στο Λ και την προέκτασή της BA στο K .

Για το σημείο τομής των διαγωνίων M ισχύει $MA \cdot M\Gamma + MA \cdot \Gamma\Gamma = MB \cdot M\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι $B\hat{K}\Gamma = B\hat{\Lambda}\Gamma$.

4. Να αποδείξετε ότι για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ισχύει

$$\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2)} + \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{\alpha_2(\alpha_2 + \alpha_3)} + \dots + \frac{\alpha_n - \alpha_{n-1}}{\alpha_{n-1}(\alpha_{n-1} + \alpha_n)} + \frac{\alpha_1 - \alpha_n}{\alpha_n(\alpha_n + \alpha_1)} \geq 0.$$