Ευκλείδης Β' Λυκείου 2004-2005

1. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B}=3\hat{\Gamma}$. Η μεσοκάθετη της ΒΓ τέμνει την ΑΓ στο Δ. Από το Α φέρνουμε κάθετη προς τη ΒΔ που τέμνει τη ΒΔ στο Ε και τη ΒΓ στο Ζ. Η παράλληλη από το Δ προς τη ΒΓ τέμνει την ΑΖ στο σημείο Ι.

Να αποδείξετε ότι:

α) Η ΒΙ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{B}\Delta$.

β) Το τετράπλευρο ΒΖΔΙ είναι ρόμβος.

2. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ>ΑΓ και η κάθετος από το Γ προς τη διάμεσο ΑΔ την τέμνει στο Ε και ισχύει $A\hat{B}\Gamma = A\hat{\Gamma}E$.

Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

3. Οι πραγματικοί αριθμοί x, y, z ικανοποιούν τις σχέσεις: $(\Sigma):\ \left\{\begin{matrix} x+y+z=16 \\ x^2+y^2+z^2=96 \end{matrix}\right\}$.

α) Να αποδείξετε ότι και οι τρεις ανήκουν στο διάστημα $\left[\frac{8}{3},\frac{26}{3}\right]$.

β) Αν $x,y,z\in\mathbb{Z}$ με $x\le y\le z$, να βρείτε τις τριάδες (x,y,z) που είναι λύσεις του (Σ).

4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΒΓ=α<ΓΑ=β<ΑΒ=γ. Να εξετάσετε αν είναι δυνατόν να ελαττωθούν και οι τρεις πλευρές κατά το ίδιο μήκος, έτσι ώστε να γίνουν πλευρές ορθογωνίου τριγώνου.