Ευκλείδης Γ' Λυκείου 2004-2005

1. Να προσδιορίσετε τους μιγαδικούς αριθμούς z=x+yi, x,y $\in \mathbb{R}$, που είναι λύσεις της εξίσωσης

$$|z+1| = 4z - 2\bar{z} - 6i$$

2. Να προσδιορίσετε τους θετικούς ακέραιους α, β με α>β, τέτοιους ώστε

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{2005}.$$

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$. Ο κύκλος κέντρου Α και ακτίνας ΑΒ=γ τέμνει τη μεσοκάθετη της ΒΓ στο σημείο Δ, που είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου ΑΒΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha^2 < 2(\beta^2 - \gamma^2)$.

β) $B\hat{A}\Delta = 2\Delta\hat{A}\Gamma$.

4. Θεωρούμε σύνολο Μ με στοιχεία 2004 θετικούς πραγματικούς αριθμούς με την ιδιότητα:

''Για οποιαδήποτε στοιχεία α, β του Μ με α >β ένας τουλάχιστον από τους αριθμούς (α+β), (α–β) ανήκει στο σύνολο Μ.''

Να αποδείξετε ότι, αν διατάξουμε τους αριθμούς του συνόλου Μ κατά αύξουσα τάξη, τότε αυτοί αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.