Ευκλείδης Γ' Λυκείου 2005-2006

1. Για μια συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει: $f\left[f(x)\right] = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$, για κάθε x $\in \mathbb{R}$.

α) Να βρεθεί το f(1).

β) Να εξεταστεί αν η συνάρτηση $g(x) = x^3 + x^2 f(x) - 2x f^2(x) + 3$ είναι 1–1.

2. Έστω α, β θετικοί ακέραιοι τέτοιοι ώστε $\frac{\alpha}{\beta} < \sqrt{5}$.

Να δειχτεί ότι $\sqrt{5} - \frac{\alpha}{\beta} > \frac{1}{4\alpha\beta}$.

3. Έστω ΑΒΓΔ κυρτό τετράπλευρο τέτοιο ώστε ΑΔ=ΒΓ, ΑΔ μη παράλληλη προς το ΒΓ και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ.

Να αποδειχτεί ότι υπάρχει σημείο Ρ διάφορο του Ο τέτοιο ώστε ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων ΡΒΔ και ΡΑΓ να ισούται με το τετράγωνο του λόγου των πλευρών ΡΒ και ΡΑ αντίστοιχα.

4. Έστω 2ν>κ και έστω ότι οι ακέραιοι αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ αφήνουν διαφορετικά υπόλοιπα όταν διαιρεθούν δια του κ.

Να αποδειχτεί ότι για κάθε ακέραιο λ υπάρχουν δείκτες i, j από το σύνολο {1, 2, 3, ..., ν} τέτοιοι ώστε κ \ $(\alpha_i + \alpha_j - \lambda)$.