



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
68<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”  
ΣΑΒΒΑΤΟ, 19 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2008

## Α΄ τάξη Λυκείου

### Πρόβλημα 1

(α) Να απλοποιήσετε την παράσταση

$$K = (x + y)^3 - (x - y)^3 - 6x^2y - y^3$$

(β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$A = 200004^3 - 199996^3 - 24 \cdot 200000^2 - 64$$

είναι κύβος ακεραίου.

### Πρόβλημα 2

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς  $a, b$  ισχύει ότι

$$a^2 + b^2 - 2a = 2b + ab - 4,$$

να βρεθούν οι λύσεις της εξίσωσης

$$(2x - a)^3 - (x - b)^3 - x^3 = 0.$$

### Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με πλευρές  $AB = 2a$  και  $AD = a$ . Να αποδείξετε ότι το μέσον Μ της πλευράς ΑΒ έχει την ιδιότητα:

το άθροισμα  $\Delta M + M\Gamma$  είναι το ελάχιστο δυνατό για τις διάφορες θέσεις του σημείου Μ πάνω στην ευθεία ΑΒ.

### Πρόβλημα 4

Αν οι αριθμοί  $x, y, z$  είναι τέτοιοι ώστε  $x > 0, y + 1 > 0, z + 2 > 0$  και  $x + y + z = 3$ , να αποδείξετε ότι

$$\frac{x(y+1)}{x+y+1} + \frac{(y+1)(z+2)}{y+z+3} + \frac{x(z+2)}{x+z+2} \leq 3.$$

Για ποιες τιμές των  $x, y, z$  ισχύει η ισότητα;

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ