ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
68^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 19 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2008

Γ΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Αν ο z είναι μιγαδικός με $\mathrm{Re}(z) \neq 0$, $\mathrm{Im}(z) \neq 0$ και

$$\frac{6z^4 + 5z^2 + 6}{3z^4 + z^2 + 3} \in \mathbb{R},$$

να αποδείξετε ότι: $|z| = 1$.

Πρόβλημα 2

Να λύσετε το σύστημα

$$\left\{ \begin{aligned} x^3 + 3xy + y^3 &= 1 \\ x^3 - x^2 &= y^3 - y^2 \end{aligned} \right\} \qquad (\Sigma)$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται η ακολουθία α_ν με $\nu \in \mathbb{N}^*$, για την οποία ισχύει:

$$\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = 2\nu + 1, \text{ για κάθε } \nu \in \mathbb{N}^*.$$

Να αποδείξετε ότι το γινόμενο δύο οποιωνδήποτε διαδοχικών όρων της ακολουθίας είναι επίσης όρος της ακολουθίας.

Πρόβλημα 4

. Έστω Σ εσωτερικό σημείο οξυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ. Οι ευθείες ΑΣ, ΒΣ και ΓΣ τέμνουν τις πλευρές ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ στα σημεία A', B' και Γ' αντίστοιχα, ώστε $\Sigma\mathrm{A}' \leq \mathrm{A}\Sigma$, $\Sigma\mathrm{B}' \leq \mathrm{B}\Sigma$ και $\Sigma\Gamma' \leq \Gamma\Sigma$.

Αν θέσουμε $x = (\Sigma\mathrm{AB})$, $y = (\Sigma\mathrm{B}\Gamma)$ και $z = (\Sigma\mathrm{A}\Gamma)$,να αποδείξετε ότι:

$$x^4 + y^4 + z^4 \leq 2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2.$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ