



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
69^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 17 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2009

Β' τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το σύστημα

$$x^2 + 4y^2 = 4a^2$$

$$ax - y = 2a,$$

έχει μία μόνο λύση.

Για τις τιμές του a που θα βρείτε, να λύσετε το σύστημα.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Έστω $S_1 = x + y + z$ και $S_2 = xy + yz + zx$, όπου $x, y, z \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε να ικανοποιούν την ισότητα

$$x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y) = 6.$$

(α) Να αποδείξετε ότι: $3xyz = S_1 S_2 - 6$.

Μονάδες 4

(β) Να προσδιορίσετε τους αριθμούς x, y, z , αν είναι $S_1 = 3$ και $S_2 = 2$.

Μονάδες 1

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$. Αν $A\Delta$ είναι ύψος του τριγώνου και K_1, K_2, K_3 είναι τα κέντρα των εγγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων $AB\Delta$, $A\Gamma\Delta$, $AB\Gamma$, αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι: $AK_3 = K_1 K_2$.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4.

Να προσδιορίσετε την τιμή του ακέραιου αριθμού k , $1 < k < 30$ και μη σταθερό πολυώνυμο $P(x)$ με πραγματικούς συντελεστές, έτσι ώστε να ισχύει:

$$(x - k)P(3x) = k(x - 1)P(x),$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 5