



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
69<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"  
ΣΑΒΒΑΤΟ, 17 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2009

## Γ' τάξη Λυκείου

### Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε τις τιμές της παραμέτρου  $m$  για τις οποίες το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f(x) = -3x + 6$ ,  $g(x) = mx$ ,  $m \in \mathbb{R}$ , και τον άξονα των  $x$  ισούται με 3. *Μονάδες 5*

### Πρόβλημα 2

Έστω  $H$  το ορθόκентρο και  $O$  το περίκентρο οξυγωνίου τριγώνου  $AB\Gamma$ . Έστω ακόμη  $\Delta$ ,  $E$  και  $Z$  τα μέσα των πλευρών του  $B\Gamma$ ,  $A\Gamma$  και  $AB$ , αντίστοιχα. Θεωρούμε τα σημεία  $\Delta_1$ ,  $E_1$  και  $Z_1$  έτσι ώστε:

$$\overrightarrow{O\Delta_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{O\Delta}, \quad \overrightarrow{OE_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{OE} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{OZ_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{OZ}, \quad \text{με } \lambda > 1.$$

Ο κύκλος  $C_\alpha$  που έχει κέντρο το σημείο  $\Delta_1$  και διέρχεται από το  $H$  τέμνει την ευθεία  $B\Gamma$  στα σημεία  $A_1$  και  $A_2$ . Όμοια, οι κύκλοι  $C_\beta$  ( $E_1, E_1H$ ) και  $C_\gamma$  ( $Z_1, Z_1H$ ) ορίζουν τα σημεία  $B_1$ ,  $B_2$  και  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  στις ευθείες  $A\Gamma$  και  $AB$ , αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα σημεία  $A_1, A_2, B_1, B_2, \Gamma_1$  και  $\Gamma_2$  είναι ομοκυκλικά.

*Μονάδες 5*

### Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε την τιμή του θετικού ακέραιου  $k$  και μη σταθερό πολυώνυμο  $P(x)$  με πραγματικούς συντελεστές, βαθμού  $n$ , έτσι ώστε να ισχύει:

$$(x - k)P(3x) = k(x - 1)P(x),$$

για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

*Μονάδες 5*

### Πρόβλημα 4

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών, το σύνολο των πραγματικών αριθμών ( $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ ). Αν για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς  $x, y$  ισχύει η σχέση:

$$f(f(f(x)) - f(y)) = f(x) - f(f(y)),$$

να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι περιττή.

*Μονάδες 5*

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**