



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 23 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2010

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

(i) Να βρείτε τις τιμές του ρητού αριθμού α , για τις οποίες ο αριθμός $A = \alpha\sqrt{3}$ είναι ρητός.

Μονάδες 2

(ii) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $B = (1 + \sqrt{3})^2$ είναι άρρητος.

Μονάδες 3

Πρόβλημα 2

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$x + 1 - 2|x| = \alpha x,$$

έχει, για κάθε τιμή της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$, μία τουλάχιστον πραγματική λύση.

Για ποιες τιμές του α η εξίσωση έχει δύο διαφορετικές μεταξύ τους πραγματικές λύσεις;

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο ABC εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O, R)$ και έστω A_1, B_1, C_1 τα αντιδιαμετρικά σημεία των κορυφών του A, B, C . Στις ευθείες που ορίζουν οι πλευρές BC, AC, AB θεωρούμε τα σημεία A_2, B_2, C_2 , αντίστοιχα, και έστω (ε_1) η ευθεία που ορίζουν τα σημεία A_1, A_2 , (ε_2) η ευθεία που ορίζουν τα σημεία B_1, B_2 και (ε_3) η ευθεία που ορίζουν τα σημεία C_1, C_2 .

Έστω ακόμη (δ_1) η παράλληλη ευθεία που φέρουμε από το σημείο A προς την (ε_1) , (δ_2) η παράλληλη ευθεία που φέρουμε από το σημείο B προς την (ε_2) και (δ_3) η παράλληλη ευθεία που φέρουμε από το σημείο C προς την (ε_3) . Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ και (ε_3) συντρέχουν (δηλαδή, περνάνε από το ίδιο σημείο), αν, και μόνο αν, οι ευθείες $(\delta_1), (\delta_2)$ και (δ_3) συντρέχουν.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Οι πραγματικοί αριθμοί x, y και z ικανοποιούν τις ισότητες:

$$x^3 - y^3 = 26z^3$$

$$x^2y - xy^2 = 6z^3.$$

(α) Να εκφράσετε τους x, y συναρτήσει του z .

Μονάδες 3

(β) Αν επιπλέον ισχύει ότι $x + 2y + 3z = 8$, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, y και z .

Μονάδες 2

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ