



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 23 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2010

Γ' τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Η ακολουθία a_n , $n \in \mathbb{N}^*$, ορίζεται αναδρομικά από τις σχέσεις

$$a_{n+1} = a_n + kn, n \in \mathbb{N}^*,$$

όπου k θετικός ακέραιος και $a_1 = 1$. Να βρείτε για ποια τιμή του k ο αριθμός 2011 είναι όρος της ακολουθίας a_n , $n \in \mathbb{N}^*$.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Δίνεται οξυγώνιο και σκαληνό τρίγωνο ABC και έστω M_1, M_2, M_3 τυχόντα σημεία των πλευρών του BC, AC, AB αντίστοιχα. Έστω ακόμη τα ύψη του AH_1, BH_2, CH_3 . Να αποδείξετε ότι οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων $AH_2H_3, BM_1H_3, CM_1H_2$ περνάνε από το ίδιο σημείο (έστω K_1), οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων $BH_1H_3, AM_2H_3, CM_2H_1$ περνάνε από το ίδιο σημείο (έστω K_2) και οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων $CH_1H_2, AM_3H_2, BM_3H_1$ περνάνε από το ίδιο σημείο (έστω K_3). Στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι οι ευθείες AK_1, BK_2, CK_3 συντρέχουν (δηλαδή, περνάνε από το ίδιο σημείο), αν, και μόνο αν, οι ευθείες AM_1, BM_2, CM_3 συντρέχουν.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Αν $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ με $(a, b) \neq (0, 0)$ και $(x, y) \neq (0, 0)$ και ισχύουν

$$a(x^2 - y^2) - 2bxy = x(a^2 - b^2) - 2aby$$

$$b(x^2 - y^2) + 2axy = y(a^2 - b^2) + 2abx,$$

να αποδείξετε ότι $x = a$ και $y = b$.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Σημείο M βρίσκεται στο εσωτερικό κύκλου $C(O, r)$, όπου $r = 15\text{cm}$, σε απόσταση 9cm από το κέντρο του κύκλου. Να βρείτε τον αριθμό των χορδών του κύκλου $C(O, r)$ που περνάνε από το σημείο M και το μήκος τους είναι ακέραιος αριθμός.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ