



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 15 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2011

Β' τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση

$$(|x|-1)^2 = 2x + \alpha,$$

για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α .

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$x + y + z = 8$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 26$$

$$xy + xz = (yz + 1)^2.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Αν οι α, β, γ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\alpha\beta\gamma}$, να αποδείξετε ότι:

$$1 \leq \frac{(\alpha^3 + \beta^3)\gamma}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{(\beta^3 + \gamma^3)\alpha}{\beta^2 + \gamma^2} + \frac{(\gamma^3 + \alpha^3)\beta}{\gamma^2 + \alpha^2} < 2.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Δίνεται οξυγώνιο και σκαληνό τρίγωνο $AB\Gamma$ (με $AB < A\Gamma$) εγγεγραμμένο σε κύκλο (c) με κέντρο O και ακτίνα R . Από το σημείο A φέρνουμε τις δύο εφαπτόμενες προς τον κύκλο (c_1) , που έχει κέντρο το σημείο O και ακτίνα $r = OM$ (M είναι το μέσο της $B\Gamma$). Η μία εφαπτόμενη εφάπτεται στο κύκλο (c_1) στο σημείο T , τέμνει την $B\Gamma$ στο σημείο N και το κύκλο (c) στο σημείο N_1 (θεωρούμε $BN < BM$). Η άλλη εφαπτόμενη εφάπτεται στο κύκλο (c_1) στο σημείο Σ , τέμνει την $B\Gamma$ στο σημείο K και το κύκλο (c) στο σημείο K_1 (θεωρούμε $\Gamma K < \Gamma M$). Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $BN_1, \Gamma K_1$ και AM περνάνε από το ίδιο σημείο (συντρέχουν).

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ