



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
71<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"  
ΣΑΒΒΑΤΟ, 15 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2011

Γ' τάξη Λυκείου

**Πρόβλημα 1**

Αν οι  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με άθροισμα 12, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{(\alpha^2 + 4\beta^2)\gamma}{4\alpha\beta} + \frac{(\beta^2 + 4\gamma^2)\alpha}{4\beta\gamma} + \frac{(\gamma^2 + 4\alpha^2)\beta}{4\gamma\alpha} > 12$$

*Μονάδες 5*

**Πρόβλημα 2**

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$x^2 + 2xy = 5$$

$$y^2 - 3xy = -2.$$

*Μονάδες 5*

**Πρόβλημα 3**

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  εγγεγραμμένο σε κύκλο  $(c)$  με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $R$ . Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου  $AOB$  (έστω  $(c_1)$ ), τέμνει την  $A\Gamma$  στο σημείο  $K$  και την  $B\Gamma$  στο σημείο  $N$ . Έστω  $(c_2)$  ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου  $\Gamma KN$  και  $(c_3)$  ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου  $O\Gamma K$ . Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι  $(c_1)$ ,  $(c_2)$  και  $(c_3)$  είναι ίσοι μεταξύ τους.

*Μονάδες 5*

**Πρόβλημα 4**

Η ακολουθία  $a_n, n \in \mathbb{N}^*$ , ορίζεται αναδρομικά από τις σχέσεις

$$a_{n+1} = a_n - \frac{k}{2^n}, n \in \mathbb{N}^*, a_1 = 1,$$

όπου  $k$  θετικός ακέραιος.

(i) Να προσδιορίσετε το γενικό όρο  $a_n$  της ακολουθίας ως συνάρτηση των  $n$  και  $k$ .

*Μονάδες 2*

(ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί θετικοί ακέραιοι  $k, n$  τέτοιοι ώστε :  $a_n = \frac{1}{2^{1000}}$ .

*Μονάδες 3*