



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2012

Γ΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να βρεθεί η αριθμητική πρόοδος α_n , $n = 1, 2, 3, \dots$ που έχει πρώτο όρο $\alpha_1 = \alpha \neq 0$, διαφορά $\omega \neq 0$ και είναι τέτοια ώστε ο λόγος του αθροίσματος $\alpha_1 + \dots + \alpha_n$ των n πρώτων όρων της προς το άθροισμα $\alpha_{n+1} + \dots + \alpha_{3n}$ των επόμενων $2n$ το πλήθος όρων της είναι σταθερός, δηλαδή ανεξάρτητος του n .

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$x^2 = \frac{8z^4}{16+z^4}, y^2 = \frac{8x^4}{16+x^4}, z^2 = \frac{8y^4}{16+y^4}.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O, R)$. Τα ύψη του $AD, BE, \Gamma Z$ τέμνουν τον περιγεγραμμένο κύκλο στα σημεία A_1, B_1, Γ_1 αντίστοιχα. Αν A_2, B_2, Γ_2 είναι τα μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων OD, OE, OZ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι οι ευθείες $A_1A_2, B_1B_2, \Gamma_1\Gamma_2$ περνάνε από το ίδιο σημείο.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Βρείτε όλες τις ρητές τιμές του x για τις οποίες είναι ρητός ο αριθμός $\sqrt{4x^2 - ax + b}$, όπου a, b ρητοί τέτοιοι ώστε $a^2 < 16b$.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ