



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
73<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"  
ΣΑΒΒΑΤΟ, 12 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2013

Γ' τάξη Γυμνασίου

**Πρόβλημα 1**

(α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left( \frac{x^3}{y^2} + \frac{1}{3} \right) \cdot \left( \frac{x}{y} \right)^3 + \frac{81x^2 + 27y}{y}, \text{ όταν } x = 3^{-2}, y = 3^{-3}.$$

*Μονάδες 2*

(β) Να βρείτε το πλήθος των ψηφίων του αριθμού  $B = 16^{23} \cdot 5^{89}$ , όταν αυτός γραφεί στη δεκαδική αναπαράστασή του.

*Μονάδες 3*

**Πρόβλημα 2**

Από τους μαθητές ενός Γυμνασίου το 65% παίζει ποδόσφαιρο, το 45% παίζει μπάσκετ, ενώ το 20% παίζει και ποδόσφαιρο και μπάσκετ. Επιπλέον υπάρχουν 12 μαθητές που δεν παίζουν κανένα άθλημα, ενώ υπάρχουν άλλοι 24 μαθητές που παίζουν μόνο βόλεϊ. Να βρείτε πόσους μαθητές έχει το Γυμνάσιο, πόσοι από αυτούς παίζουν ποδόσφαιρο και πόσοι από αυτούς παίζουν μπάσκετ.

*Μονάδες 5*

**Πρόβλημα 3**

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς  $a$ . Προεκτείνουμε το ύψος του ΑΔ προς το μέρος του Α κατά τμήμα  $AE = AD$ . Φέρουμε τις ΕΒ, ΕΓ και εξωτερικά του τριγώνου ΕΒΓ κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΕΖΓ. Έστω Μ το μέσον του τμήματος ΑΕ.

(i) Να αποδείξετε ότι:  $AZ = EG$ .

(ii) Να βρείτε το εμβαδό του τετραπλεύρου ΑΓΖΕ ως συνάρτηση του  $a$ .

(iii) Να βρείτε το εμβαδό του τετραπλεύρου ΒΓΖΜ ως συνάρτηση του  $a$ .

*Μονάδες 5*

**Πρόβλημα 4**

Δίνονται τα πολυώνυμα

$$P(x) = (ax^2 + bx + c)(ax + b) \text{ και } Q(x) = a^2x^3 + 4x^2 + dx + e,$$

όπου οι συντελεστές  $a, b, c, d, e$  είναι θετικοί ακέραιοι. Αν ισχύει ότι  $P(1) = 21$ , να βρείτε τις τιμές των  $a, b, c, d, e$  για τις οποίες τα πολυώνυμα  $P(x)$  και  $Q(x)$  είναι ίσα.

*Μονάδες 5*

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες μετά την παράδοση των θεμάτων

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ