



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
"Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 12 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2013

Γ' τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Στο σύνολο των ακεραίων, να λυθεί το σύστημα:

$$xy = z^2 + 2, \quad y^3 = x^3 + 2x^2 + 1.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 2

Να βρείτε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f(x^2) - y^2 = f(x+y) \cdot f(x-y), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 5

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε τις τιμές του πραγματικού αριθμού x για τις οποίες ο αριθμός

$$\sqrt{a-x} + \sqrt{a+x},$$

όπου $a > 1$ πραγματική παράμετρος, παίρνει ακέραιες τιμές.

Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι είναι δυνατόν να ορίσουμε την τιμή της παραμέτρου a έτσι ώστε ο αριθμός $\sqrt{a-x} + \sqrt{a+x}$ να είναι ακέραιος περισσότερες ή ίσες από K φορές, όπου K τυχόν θετικός ακέραιος.

Μονάδες 5

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο ABC ($AB < AC < BC$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O, R)$. Η προέκταση του ύψους του AD τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του $c(O, R)$ στο σημείο E . Ο κύκλος $c_1(D, DA)$ τέμνει την πλευρά AC στο σημείο T , την ευθεία AB στο σημείο S , τον κύκλο $c(O, R)$ στο σημείο H και την ευθεία OA στο σημείο Z . Να αποδείξετε ότι:

(α) Το τετράπλευρο $SBTC$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο, έστω c_2 .

(β) Τα σημεία O, D, E, Z, H και το κέντρο του κύκλου c_2 , βρίσκονται επάνω στο ίδιο κύκλο.

Μονάδες 5

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες μετά την παράδοση των θεμάτων

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ