



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
74^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 18 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2014

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Θεωρούμε τους αριθμούς $x = \frac{2}{(1+\sqrt{3})(1+\sqrt[4]{3})(1+\sqrt[8]{3})}$ και $y = \sqrt[4]{2}$.

Να συγκρίνετε τους αριθμούς $x+1$ και y .

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$1 - \frac{|x-1|}{3} \geq 0 \quad \text{και} \quad (|x|-2) \cdot (|x|-5) \leq 0.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma > B\Gamma$. Ο κύκλος $c_1(\Gamma, B\Gamma)$ (με κέντρο Γ και ακτίνα $B\Gamma$) τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Δ . Ο κύκλος $c_2(A, A\Delta)$ (με κέντρο A και ακτίνα $A\Delta$) τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο E και τον κύκλο $c_1(\Gamma, B\Gamma)$ στο σημείο Z . Ο περιγεγραμμένος κύκλος c_3 του τριγώνου $A\Delta Z$ τέμνει την ευθεία BE στο σημείο M .

(α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία B, E, Z βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία.

(β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία AM είναι μεσοκάθετη της πλευράς $B\Gamma$.

Πρόβλημα 4

Θεωρούμε θετικούς πραγματικούς αριθμούς a, b που είναι τέτοιοι ώστε

$$a^2 + 4b^2 = 2a + 12b - 5.$$

Να βρεθεί η μέγιστη δυνατή τιμή του αθροίσματος $a+b$ και οι τιμές των a, b για τις οποίες αυτή λαμβάνεται.

Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες μετά την παράδοση των θεμάτων

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ