



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
74^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 18 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2014

Β' τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Θεωρούμε στο επίπεδο τέσσερα διαφορετικά μεταξύ τους σημεία O, A, B και Γ , έτσι ώστε τα σημεία O, A και B να μην είναι συνευθειακά και έστω $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$, $\overrightarrow{O\Gamma} = \vec{\gamma}$. Αν ισχύει η ισότητα

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\gamma}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB},$$

να αποδείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ είναι κάθετο στη διαγώνιο OD του παραλληλογράμμου $OADB$.

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του πραγματικού αριθμού a για τις οποίες η εξίσωση

$$x^3 - 2x^2 = 4ax^2 - 11ax + 6a$$

έχει όλες τις ρίζες της στους ακέραιους.

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε όλες τις τριάδες πραγματικών αριθμών (x, y, z) που είναι λύσεις του συστήματος

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6a^2,$$

$$x + y = 3a,$$

$$y + z \geq 3a,$$

όπου a θετικός πραγματικός αριθμός.

Πρόβλημα 4

Θεωρούμε τρίγωνο ABC εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) και έστω I το έκκεντρο του τριγώνου. Θεωρούμε το μέσον N του τόξου BC που δεν περιέχει το A και το μέσον M του τόξου BC που περιέχει το A . Η ευθεία MI τέμνει τον κύκλο (O, R) στο σημείο D και τον κύκλο (N, NI) για δεύτερη φορά στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι: $\hat{E}BD = \hat{I}BC$.

Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες μετά την παράδοση των θεμάτων

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ