



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
74<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”  
ΣΑΒΒΑΤΟ, 18 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2014  
Γ' τάξη Λυκείου

**Πρόβλημα 1**

Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του πραγματικού αριθμού  $a$  για τις οποίες η εξίσωση

$$x^3 - 4x^2 = 5ax^2 - 26ax + 24a$$

έχει όλες τις ρίζες της στους ακέραιους.

**Πρόβλημα 2**

Στο ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς  $Oxy$  του επιπέδου δίνεται το χωρίο

$$D = \{(x, y) : (x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 8\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

(α) Να προσδιορίσετε τη μέγιστη δυνατή τιμή του αθροίσματος  $x+y$ , όταν  $(x, y) \in D$ , και τις τιμές των  $x, y$  για τις οποίες λαμβάνεται.

(β) Βρείτε την ελάχιστη τιμή του  $k$ , για την οποία η ευθεία  $\varepsilon$  με εξίσωση  $x+y=k$  είναι εφαπτομένη του κύκλου  $C: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 8$ , προσδιορίζοντας και το αντίστοιχο σημείο επαφής.

**Πρόβλημα 3**

Έστω  $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ , όπου  $\mathbb{N}^*$  είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών χωρίς το 0, μία συνάρτηση που είναι 1-1 και έστω  $k$  ένας θετικός ακέραιος. Αν ο αριθμός

$$3 \left[ (f(1)-1)^2 + (f(2)-1)^2 + \dots + (f(k+1)-1)^2 \right]$$

είναι κύβος φυσικού αριθμού, τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει  $a \in \{1, 2, \dots, k+1\}$  τέτοιο, ώστε

$$f(a) \geq k+2.$$

**Πρόβλημα 4**

Δίνονται κύκλος  $c(O, R)$ , δύο άνισες (μη τεμνόμενες εντός του κύκλου) και μη παράλληλες μεταξύ τους χορδές  $AB, \Gamma\Delta$  και τα μέσα τους  $K, M$ , αντίστοιχα. Ο περιγεγραμμένος κύκλος  $c_I$  του τριγώνου  $OKM$  τέμνει το κύκλο  $c(O, R)$  στα σημεία  $E, Z$  (το σημείο  $E$  ανήκει στο μικρό τόξο  $AB$ ). Η  $EZ$  τέμνει τις χορδές  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  στα σημεία  $\Lambda, N$ , αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

(i) Τα σημεία  $K, \Lambda, M$  και  $N$  ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

(ii) Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου  $K\Lambda E$  εφάπτεται στον κύκλο  $c(O, R)$ .

Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες μετά την παράδοση των θεμάτων ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ