



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
75<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”  
17 Ιανουαρίου ~~2014~~ 2015  
Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

**Πρόβλημα 1**

Δίνεται η παράσταση: 
$$A = \frac{\alpha^2 - 1}{n^2 + \alpha n} \cdot \left( \frac{n^2}{n-1} - n \right) \cdot \frac{\alpha + n - \alpha n^3 - n^4}{1 - \alpha^2},$$
 με  $\alpha$  πραγματικό

αριθμό μεγαλύτερο του 1 και  $n$  θετικό ακέραιο,  $n > 1$ . Να αποδείξετε ότι:

(α)  $A = n^2 + n + 1$

(β) Δεν είναι δυνατόν ο  $A$  να είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.

**Πρόβλημα 2**

Στις εξετάσεις του Α. Σ. Ε.Π. τα εξεταζόμενα μαθήματα βαθμολογούνται από 0 μέχρι 100. Ένας υποψήφιος βαθμολογήθηκε σε όλα τα μαθήματα με διαφορετικό βαθμό και ο μέσος όρος των βαθμών του ήταν 40. Αν παραλείψουμε το μικρότερο βαθμό του ο μέσος όρος των υπόλοιπων βαθμών του είναι 46. Αν παραλείψουμε το μεγαλύτερο βαθμό του ο μέσος όρος των υπόλοιπων βαθμών του είναι 28, ενώ, αν παραλείψουμε και το μικρότερο και το μεγαλύτερο βαθμό του ο μέσος όρος των βαθμών που απομένουν είναι 32. Να βρείτε τον αριθμό των μαθημάτων, το μικρότερο και το μεγαλύτερο βαθμό του υποψηφίου.

**Πρόβλημα 3**

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  τέτοιο ώστε  $AB = B\Delta = \Gamma\Delta$ . Φέρουμε το ύψος του  $\Delta E$ , όπου  $E$  σημείο της πλευράς  $AB$ . Έστω  $Z$  το συμμετρικό της κορυφής  $A$  ως προς κέντρο το σημείο  $E$ . Έστω επίσης  $K$  το συμμετρικό της κορυφής  $\Gamma$  ως προς κέντρο το σημείο  $Z$  και  $\Lambda$  το συμμετρικό της κορυφής  $B$  ως προς κέντρο το σημείο  $A$ . Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $\Delta K\Lambda$  είναι ισοσκελές.

**Πρόβλημα 4**

Ο τετραψήφιος θετικός ακέραιος  $\overline{xyzw} = 1000x + 100y + 10z + w$  όταν διαιρεθεί με το άθροισμα των ψηφίων του δίνει πηλίκο 327 και υπόλοιπο 14. Επίσης ο αριθμός  $\overline{wz yx} = 1000w + 100z + 10y + x$  όταν διαιρεθεί με το άθροισμα των ψηφίων του δίνει πηλίκο 227 και υπόλοιπο 16. Να βρεθεί ο αριθμός  $\overline{xyzw}$ .

*Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες  
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες*

*Καλή επιτυχία*