



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
76<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”  
16 Ιανουαρίου 2016  
Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

**Πρόβλημα 1**

Να υπολογισθεί η τιμή της παράστασης

$$A = \left( \frac{25}{x+8} - \frac{\sqrt[3]{x} + 2}{\sqrt[3]{x^2} - 2 \cdot \sqrt[3]{x} + 4} \right) \cdot \frac{\sqrt[3]{x^4} + 8 \cdot \sqrt[3]{x}}{9 - \sqrt[3]{x^2}} + \frac{21 - \sqrt[3]{x^2}}{3 + \sqrt[3]{x}}, \text{ όπου } x > 0 \text{ και } x \neq 27.$$

**Πρόβλημα 2**

Να εξετάσετε, αν η εξίσωση  $64x^2 + 16^{10}x - 2016^{2016} = 0$  έχει ρητή ρίζα.

**Πρόβλημα 3**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$  και  $\hat{A} = 40^\circ$ . Έστω  $\Delta$  το μέσο της πλευράς  $AG$ . Θεωρούμε τα ισόπλευρα τρίγωνα  $AE\Delta$  και  $\Delta\Gamma Z$  των οποίων οι κορυφές  $E, Z$  βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο με ακμή την  $AG$  και στο οποίο ανήκει η κορυφή  $B$ . Αν η  $E\Delta$  τέμνει την  $AB$  στο  $K$ , να αποδείξετε ότι η  $KZ$  είναι κάθετη στη  $B\Gamma$ .

**Πρόβλημα 4**

Τρεις φίλοι, ο Γιάννης και ο Βαγγέλης και ο Βασίλης, έχουν μία σακούλα με καραμέλες. Ο Γιάννης βάζει το χέρι μέσα στη σακούλα, παίρνει κάποιες καραμέλες, και από αυτές που πήρε κρατάει τα  $\frac{3}{4}$  και τις υπόλοιπες (από αυτές που πήρε) τις μοιράζει εξίσου στους άλλους δύο. Ο Βαγγέλης παίρνει κάποιες από τις υπόλοιπες που έμειναν στη σακούλα, κρατάει το  $\frac{1}{4}$  από αυτές και τις υπόλοιπες από αυτές που έβγαλε τις μοιράζει εξίσου στους άλλους δύο. Τέλος ο Βασίλης παίρνει τις υπόλοιπες που είχαν μείνει στη σακούλα κρατάει το  $\frac{1}{6}$  από αυτές και τις υπόλοιπες από αυτές που έβγαλε τις μοιράζει εξίσου στους άλλους δύο. Αν σε κάθε μοιρασιά καθένας παίρνει θετικό ακέραιο αριθμό από καραμέλες και τελικά οι καραμέλες του Γιάννη είναι τριπλάσιες από τις καραμέλες του Βασίλη και οι καραμέλες του Βαγγέλη είναι διπλάσιες από τις καραμέλες του Βασίλη, να βρείτε τον ελάχιστο αριθμό από καραμέλες που μπορεί να περιέχει η σακούλα.

**Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες**  
**Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες**

**Καλή επιτυχία**