



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
79^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
19 Ιανουαρίου 2019

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί α, β είναι τέτοιοι ώστε: $\alpha^3 + \beta^3 = 2\alpha\beta(\alpha + \beta)$,

να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $K = \frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\beta^2}{\alpha^2}$.

Πρόβλημα 2

Οι θετικοί ακέραιοι n, m είναι τέτοιοι, ώστε οι αριθμοί $\frac{50}{3n-2}$ και $\frac{243}{4m-1}$ να είναι θετικοί ακέραιοι.

(α) Να βρεθεί η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η παράσταση

$$A = 2(n+1) - 3(m+2) + 7.$$

(β) Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει η παράσταση: $B = \frac{162}{n^2} - \frac{m^2}{3721}$.

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς x, y, z που ικανοποιούν τις εξισώσεις:

$$\frac{y+3x}{xy} = \frac{3z+5y}{yz} = \frac{5x+z}{zx} = \frac{140}{x^2+y^2+z^2}$$

Πρόβλημα 4

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 60^\circ$. Η διάμετρος AE του περιγεγραμμένου κύκλου $C(O, R)$ του τριγώνου $AB\Gamma$ τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο Δ , έτσι ώστε $B\Delta = 2 \cdot \Delta\Gamma$.

(α) Να αποδείξετε ότι: $\Delta\hat{O}\Gamma = 30^\circ$

(β) Να εκφράσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου $ABE\Gamma$ συναρτήσει της πλευράς $B\Gamma = \alpha$.

*Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Καλή επιτυχία!*

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες