Γ' Λυκείου 1990-1991

1. Έστω ΑΒΓ τρίγωνο και σημείο Ο στο εσωτερικό του. Από τυχαίο σημείο Μ θεωρούμε τα διανύσματα $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{M\Gamma}$. Αν κ· $\overrightarrow{MA}$ +λ· $\overrightarrow{MB}$ +μ· $\overrightarrow{M\Gamma}$ = $\overrightarrow{MO}$, όπου κ+λ+μ=1, να δείξετε ότι κ>0, λ>0, μ>0.

2. Έστω η ακολουθία α_ν με $\alpha_1=2$, $\alpha_2=1$, $\frac{2}{\alpha_\nu}=\frac{1}{\alpha_{\nu-1}}+\frac{1}{\alpha_{\nu+1}}$, με $\nu \geq 2$.

Να υπολογίσετε το $\lim_{\nu\to\infty}\alpha_\nu$.

3. Έστω Α ένας ν×ν πίνακας με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς που ικανοποιεί τη σχέση $A^2 - A + I = 0$, όπου Ι και 0 είναι ο μοναδιαίος και ο μηδενικός ν×ν πίνακας αντίστοιχα.

Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ ο πίνακας $B_\lambda = A - \lambda I$ είναι αντιστρέψιμος και να υπολογιστεί ο αντίστροφός του.

4. Έστω α_ν ακολουθία φυσικών αριθμών, με $\alpha_1=2$, $\alpha_{\nu+1}=(\nu+1)\alpha_\nu+1$, με ν = 1, 2, ... Στο επίπεδο δίνονται $\alpha_\nu+1$ διαφορετικά σημεία, που ανά τρία δεν είναι συνευθειακά. Τα τμήματα που συνδέουν 2 από τα σημεία αυτά, τα χρωματίζουμε με ν διαφορετικά χρώματα.

Να δείξετε ότι για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ υπάρχει τρίγωνο με κορυφές τα σημεία αυτά, που οι πλευρές του έχουν το ίδιο χρώμα.