Θαλής Α' Λυκείου 1995-1996

1. Δυο μαθητές Α και Β παίζουν το ακόλουθο παιχνίδι:

Τους δίνεται ένα κανονικό πολύγωνο με άρτιο πλήθος πλευρών, μεγαλύτερο από 6 (π.χ. ένα 100-γωνο). Κάθε παίκτης συνδέει δυο από τις κορυφές του πολυγώνου με ένα τμήμα το οποίο, όμως, να μην τέμνει κανένα από άλλα τέτοια τμήματα που οι παίκτες είχαν φέρει προηγουμένως. Θα χάσει ο παίκτης που πρώτος δε θα μπορέσει να φέρει ένα τέτοιο τμήμα.

Μπορεί ένας παίκτης να ακολουθήσει μια στρατηγική ώστε να νικήσει σίγουρα;

2. Ένα τετράγωνο ΚΛΜΝ είναι εγγεγραμμένο σε ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ ώστε οι κορυφές του Κ, Λ, Μ, Ν να βρίσκονται πάνω στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, και ΔΑ αντίστοιχα. Αν ο λόγος του εμβαδού του ΚΛΜΝ προς το εμβαδόν του ΑΒΓΔ είναι λ, να βρείτε το λόγο των μηκών των τμημάτων στα οποία διαιρούνται οι πλευρές του τετραγώνου ΑΒΓΔ από τις κορυφές του άλλου τετραγώνου.

3. Υπάρχει τρίγωνο με όλες τις πλευρές του και ένα ύψος του να έχουν ακέραια μήκη και η περίμετρός του να είναι 21;

4. Αν $\alpha > 0$, $\beta > 0$ να αποδείξετε ότι $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\leq\sqrt{\frac{\alpha^2}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta^2}{\alpha}}$.