Θαλής Β' Λυκείου 1995-1996

1. Έστω κύκλος ακτίνας 1, στον οποίο ορίζουμε ένα συγκεκριμένο σημείο A_0.

Στη συνέχεια ορίζουμε τα σημεία A_ν ως εξής:

Το μήκος του τόξου A_0A_ν (όπου αυτό μπορεί να είναι και μεγαλύτερο του 2π) να είναι $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{\nu}$.

Να δείξετε ότι:

α) Δεν υπάρχει σημείο A_ν, $\nu \geq 1$ που να συμπίπτει με το A_0.

β) Δεν υπάρχουν $\mu,\nu \in \mathbb{N}$, $\mu \neq \nu$ ώστε τα σημεία A_μ, A_ν να συμπίπτουν.

2. Αν ΑΒΓΔ είναι ένα τετράπλευρο περιγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας ρ, να δείξετε ότι ισχύει: $AB + \Gamma\Delta \geq 4\rho$.

3. Να εξετάσετε αν υπάρχουν φυσικοί αριθμοί ν με την ιδιότητα:

Από το σύνολο $A(\nu) = \{1, 2, \ldots, \nu\}$ μπορούμε να διαλέξουμε κ αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\kappa$ όπου $\kappa \geq 3$, $\alpha_i \neq \alpha_j$, έτσι ώστε να ισχύει, $|\alpha_1 - \alpha_2| = |\alpha_2 - \alpha_3| = \ldots = |\alpha_{\kappa-1} - \alpha_\kappa| = |\alpha_\kappa - \alpha_1|$.

Τι συμβαίνει αν απλά $\kappa \geq 1$;

4. Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $3^{21} - 2^{24} - 6^{8} - 1$ διαιρείται με το 1930.