

Θαλής Β' Λυκείου 1996-1997

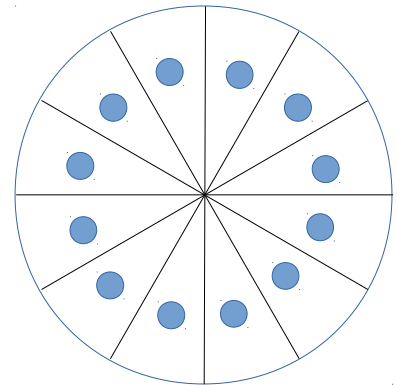
1. Αν α, β, γ πραγματικοί αριθμοί με $\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \leq 0$, να αποδείξετε ότι ισχύει $\alpha^2 + \beta^2 \leq \gamma^2$.

2. Αν x και y ακέραιοι με $0 \leq x \leq 100, 0 \leq y \leq 100$, να λυθεί η εξίσωση:

$$|x + y - 2| + |3x - 2y + 1| + 3x - 2y + 1 = 0.$$

3. Σ' ένα κύκλο είναι εγγεγραμμένο ένα πεντάγωνο $ΑΒΓΔΕ$, τέτοιο ώστε η $ΑΒ$ είναι παράλληλη προς την $ΕΔ$ και η $ΑΕ$ προς τη $ΒΓ$. Δείξτε ότι η εφαπτομένη του κύκλου στο $Α$ είναι παράλληλη προς τη $ΓΔ$.

4. Ένας δίσκος έχει χωριστεί σε 12 ίσους τομείς με ακτίνες που ξεκινούν από το κέντρο του. Στον καθένα από τους δώδεκα τομείς τοποθετούμε ένα κέρμα. Κάνουμε τώρα την εξής κίνηση: μετακινούμε ένα οποιοδήποτε κέρμα από την θέση του στον αμέσως επόμενο τομέα (κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού) και συγχρόνως μετακινούμε ένα δεύτερο κέρμα από τη θέση του στον αμέσως προηγούμενο τομέα.



Δείξτε ότι όποια διαδοχή κινήσεων και αν κάνουμε, δεν είναι δυνατόν να έρθουν όλα τα κέρματα σε ένα και τον αυτό τομέα.

Αντιθέτως δείξτε ότι αν οι τομείς ήταν δεκατρείς, τότε με κατάλληλη επιλογή κινήσεων, μπορούμε να φέρουμε όλα τα κέρματα σε ένα τομέα.