

Θαλής Γ' Λυκείου 1996-1997

1. Έστω A ένας μη μηδενικός $n \times n$ πίνακας. Δείξτε ότι υπάρχει μη μηδενικός $n \times n$ πίνακας B με $(AB)^2 = (AB)$.

2. Δίνεται ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο \mathbb{R} των πραγματικών αριθμών, ικανοποιεί τη συνθήκη

$$999f(\pi - x) + 998f(x - \pi) = 1996 \sin x .$$

Δείξτε ότι ικανοποιεί και την

$$f^2(\pi + x) + f^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \left(\frac{1996}{1997}\right)^2 .$$

3. Θεωρούμε τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και σημείο Z της προέκτασης της $A\Gamma$ ώστε $A\Gamma = BZ = \Delta Z$. Αν E το συμμετρικό του Z ως προς το Γ , να υπολογιστεί η γωνία $\Gamma B E$.

4. Δίνονται στο επίπεδο $m+n$ σημεία μη συνευθειακά ανά τρία, όπου m, n μεγαλύτερα ή ίσα του 3. Τα m σημεία είναι χρωματισμένα κόκκινα και n είναι χρωματισμένα μπλε.

α) Δείξτε ότι αν $m=n$, τότε υπάρχει τρόπος να συνδεθούν ορισμένα από αυτά τα σημεία με ευθύγραμμα τμήματα έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι ακόλουθες δυο συνθήκες:

i) κάθε σημείο να ανήκει σε ακριβώς τρία ευθύγραμμα τμήματα

ii) τα άκρα κάθε ευθύγραμμου τμήματος να είναι διαφορετικού χρώματος

β) Δείξτε ότι, αντίστροφα, αν υπάρχει τρόπος να συνδεθούν ορισμένα από αυτά τα σημεία με τμήματα έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες i) και ii), τότε $m=n$.