

Θαλής Β' Λυκείου 1999-2000

1. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (4a - 7)x + 3a^2 - 17a + 10 = 0$, $a \in \mathbb{Z}$, $a \geq -1$.

α) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τετραγώνων των ριζών της είναι περιττός ακέραιος.

β) Να υπολογιστεί η τιμή του a έτσι ώστε η μεγαλύτερη ρίζα να είναι τετραπλάσια της μικρότερης.

2. Οι πραγματικοί αριθμοί x, y, z ικανοποιούν τις ανισότητες

$$|x| \geq |y + z|, |y| \geq |z + x|, |z| \geq |x + y|.$$

Να δειχθεί ότι $x + y + z = 0$.

3. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$, εγγεγραμμένο σε κύκλο. Έστω Δ το μέσον του τόξου $B\Gamma$, που περιέχει την κορυφή A . Αν E είναι το ίχνος της κάθετης από το Δ προς την $A\Gamma$, να αποδειχθεί ότι $AB + AE = E\Gamma$.

4. Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και κάθετες πλευρές μήκους 1. Από σημείο P της υποτείνουσας $B\Gamma$ φέρουμε κάθετες $PK, P\Theta$ προς τις $AB, A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε θέση του P , ένα από τα εμβαδά (BKP) , $(P\Theta\Gamma)$ και $(K\Theta A)$ είναι μεγαλύτερο ή ίσο του $\frac{2}{9}$.