

Θαλής Γ' Λυκείου 1999-2000

1. Δίνεται η εξίσωση $x^4 - 2ax^2 + x + a^2 - a = 0$, $a \in \mathbb{R}$.

α) Θεωρείστε στην εξίσωση το a ως άγνωστο, το x ως παράμετρο και βρείτε τις ρίζες της συναρτήσεως του x .

β) Βρείτε τις ρίζες της παραπάνω εξίσωσης με άγνωστο το x συναρτήσεως της παραμέτρου a .

2. Δίνεται η τριγωνομετρική εξίσωση:

$$(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)\eta\mu 2x = \lambda(\eta\mu^3 x - \sigma\upsilon\nu^3 x), \lambda \in \mathbb{R}.$$

α) Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

β) Να λυθεί η εξίσωση όταν είναι $\lambda = -\frac{2}{3}$.

3. Έστω $AB\Gamma$ ορθογώνιο τρίγωνο με $\hat{A} = 90^\circ$. Σχηματίζουμε εξωτερικά του τριγώνου το τετράγωνο $B\Gamma\Delta E$ και φέρουμε την εσωτερική διχοτόμο της \hat{A} . Να αποδειχθεί ότι αυτή χωρίζει το τετράγωνο σε δυο ισεμβαδικά τραπέζια.

4. Αν a_1, a_2, \dots, a_{19} είναι διαφορετικοί ανά δυο μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί, να αποδειχθεί ότι υπάρχουν $x_1, x_2, \dots, x_{19} \in \{0, 1\}$, όχι όλοι μηδέν, τέτοιοι ώστε ο αριθμός $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_{19}x_{19}$ να είναι πολλαπλάσιο του 19.