Θαλής Β' Λυκείου 2000-2001

1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$x^2 + x = 2\nu + 1,\ \nu \in \mathbb{N}$$

έχει πραγματικές ρίζες.

Είναι δυνατόν οι ρίζες της εξίσωσης αυτής να είναι ακέραιοι αριθμοί;

2. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε την υποτείνουσα ΒΓ κατά τμήμα ΓΔ = ΑΓ. Η διχοτόμος της γωνίας Β τέμνει την ΑΔ στο Ε. Ο κύκλος γ κέντρου Α και ακτίνας ΑΕ τέμνει την ΒΕ, εκτός του Ε, και στο Ζ.

Να αποδείξετε ότι η χορδή ΖΕ χωρίζει τον κύκλο γ σε δυο τόξα από τα οποία το ένα είναι τριπλάσιο του άλλου.

3. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή του θετικού ακέραιου x για την οποία ο 13^x διαιρεί τον αριθμό 500!

[Δίνεται ότι 500! = 1 · 2 · 3 · ... · 499 · 500]

4. Έστω ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 2cm. Προς το ίδιο μέρος της ΑΒ θεωρούμε τα ισοσκελή τρίγωνα ΓΑΒ, ΔΑΒ, ΖΑΒ με ΓΑ = ΓΒ, ΔΑ = ΔΒ και ΖΑ = ΖΒ, έτσι ώστε

$$E_{(\Gamma AB)} = 1\ cm^2,\ E_{(\Delta AB)} = 2\ cm^2,\ E_{(ZAB)} = 3\ cm^2.$$

Να αποδείξετε ότι:

$$A\hat{\Delta}B + A\hat{Z}B = \frac{\pi}{2}$$