

1. Ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) οι πλευρές $B\Gamma = \alpha$ και $A\Gamma = \beta$ ικανοποιούν τη σχέση $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\sqrt{10}}{5}$.

Να αποδείξετε ότι είναι $\mu_\beta \perp \mu_\gamma$, όπου μ_β και μ_γ είναι οι διάμεσοι από τις κορυφές B και Γ , αντιστοίχως.

2. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν ακέραιοι x, y, z τέτοιοι ώστε να ικανοποιούν την ισότητα

$$x^2 + y^2 - 8z = 6.$$

3. Τα σημεία K, Λ βρίσκονται στο εσωτερικό του τριγώνου $AB\Gamma$ και είναι τέτοια ώστε να ισχύει:

$$(ABK) = (A\Gamma K) = (BK\Lambda) = (GK\Lambda) = (B\Lambda\Gamma)$$

α) Να αποδείξετε ότι τα K, Λ ανήκουν στη διάμεσο $A\Delta$ του τριγώνου $AB\Gamma$.

β) Αν Θ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$, να βρεθεί ο λόγος $\frac{K\Theta}{\Theta\Lambda}$.

4. Σε μια κατασκήνωση υπάρχουν 577 παιδιά από 9 διαφορετικές χώρες. Σε οποιαδήποτε ομάδα 9 παιδιών υπάρχουν 2 τουλάχιστον παιδιά με το ίδιο ύψος.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ομάδα 5 παιδιών από την ίδια χώρα που είναι του ίδιου φύλου και έχουν το ίδιο ύψος.