Θαλής Γ' Λυκείου 2001-2002

1. Δίνεται η εξίσωση

$$\mu x^2 + \beta x + \nu = 0,$$

όπου μ, ν είναι πρώτοι φυσικοί αριθμοί με $3 < \mu < \nu$ και ο β είναι ακέραιος.

Να προσδιορίσετε τον ακέραιο β συναρτήσει των φυσικών μ, ν έτσι, ώστε η εξίσωση να έχει μια τουλάχιστον ακέραια ρίζα.

2. Να προσδιορίσετε το γινόμενο των ν διαδοχικών όρων $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ γεωμετρικής προόδου, αν είναι γνωστό ότι ο φυσικός αριθμός ν είναι άρτιος και

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu = \kappa \ , \quad \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \ldots + \frac{1}{\alpha_\nu} = \lambda \ ,$$

όπου οι κ, λ είναι δεδομένοι πραγματικοί αριθμοί.

3. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 1 και $\hat{B} = 120^\circ$ υπάρχει σημείο Δ πάνω στην πλευρά ΑΓ τέτοιο ώστε να είναι $A\hat{B}\Delta = 90^\circ$ και ΔΓ = ΑΒ. Να βρείτε το μήκος του τμήματος ΑΔ.

4. Οι μαθητές Χ και Υ παίζουν ένα παιχνίδι ως εξής:

Επιλέγουν εναλλάξ ο ένας μετά τον άλλο έναν από τους αριθμούς 1 και 2. Αρχίζει ο Χ επιλέγοντας τον αριθμό $X_1 \in \{1,2\}$, συνεχίζει ο Υ επιλέγοντας τον αριθμό $Y_1 \in \{1,2\}$ και καταγράφει το άθροισμα $\Sigma_1 = X_1 + Y_1$. Στη συνέχεια ο Χ επιλέγει τον αριθμό $X_2 \in \{1,2\}$ και καταγράφει το άθροισμα $\Sigma_2 = \Sigma_1 + X_2$, ενώ ο Υ συνεχίζοντας επιλέγει τον αριθμό $Y_2 \in \{1,2\}$ και καταγράφει το άθροισμα $\Sigma_3 = \Sigma_2 + Y_2$ κ.ο.κ. Νικητής αναδεικνύεται ο μαθητής που θα καταγράψει σε μια επιλογή του ως άθροισμα τον αριθμό 200.

Να εξηγήσετε γιατί ο μαθητής Χ έχει στρατηγική νίκης.

Ισχύει το ίδιο αν ο νικητής αναδικνύεται όταν το άθροισμα γίνει 300;