

1. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και δυο τυχαία σημεία A_1 πάνω στην πλευρά $B\Gamma$ και B_1 πάνω στην πλευρά $A\Gamma$. Ονομάζουμε C_1 και C_2 τους περιγεγραμμένους κύκλους των τριγώνων BA_1B_1 , ΓA_1B_1 , αντίστοιχα. Η ευθεία AB τέμνει τον C_1 στο Γ_1 , ενώ η ευθεία Γ_1B_1 τέμνει τον C_2 στο Δ . Να αποδείξετε ότι τα ορθόκεντρα των τριγώνων $AB_1\Gamma_1$ και $\Delta B_1\Gamma$ είναι σημεία συνευθειακά με το B_1 .

2. Δίνονται οι παραστάσεις

$$A = x^2 - kx + m, B = x^2 + mx - k, \Gamma = m^2x^2 + (k - 1)x + k,$$

με $k, m \in \mathbb{R}$ και $k + m \neq 0$. Αν είναι

$$A^2 + B^2 + \Gamma^2 = AB + B\Gamma + \Gamma A$$

να βρείτε την τιμή του x , την μέγιστη τιμή του k και την τιμή του m που αντιστοιχεί στη μέγιστη τιμή του k .

3. Σε αμβλυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} > 90^\circ$) φέρουμε ημιευθεία Ax κάθετη προς την πλευρά AB που τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο Δ . Από το Δ φέρουμε παράλληλη προς την $A\Gamma$ που τέμνει την πλευρά AB στο H και τη διάμεσο BM του τριγώνου $AB\Gamma$ στο E . Από το E φέρουμε παράλληλη προς την AB που τέμνει την $B\Gamma$ στο Z . Να αποδείξετε ότι:

α) η EZ είναι διχοτόμος της γωνίας $AZ\Delta$ και

β) $\hat{\Gamma} = \hat{Z} \hat{A} E$.

4. Από τους αριθμούς $x, y, z \in \mathbb{R}$ δύο είναι αρνητικοί και ένας είναι θετικός. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{(x-y)(x^2-xy)^2}{yz} + \frac{(y-z)(y^2-yz)^2}{zx} + \frac{(z-x)(z^2-zx)^2}{xy} \geq 3(x-y)(y-z)(z-x)$$