Θαλής Γ' Λυκείου 2003-2004

1. α) Να προσδιορίσετε το σύνολο C_α των σημείων Μ του επιπέδου που είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z = x + yi με x, y $\in \mathbb{R}$ και ικανοποιούν την ισότητα

$$i(z+\bar{z}-\alpha)+z-\bar{z}=0 \text{, όπου } \alpha \in \mathbb{R}.$$

β) Αν $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \in C_\alpha$, να προσδιορίσετε σημείο Β $\in C_\alpha$ τέτοιο ώστε η μεσοκάθετος του ΑΒ να διέρχεται από το κέντρο του κύκλου K_β με εξίσωση

$$|z + 1 - 3i| = \beta,\ \beta>0.$$

Για ποια τιμή του β ο κύκλος K_β εφάπτεται του C_α;

2. Από σημείο Ρ εκτός κύκλου φέρουμε τις εφαπτόμενες ΡΑ, ΡΒ και τυχαία τέμνουσα ΡΓΔ προς τον κύκλο. Αν ισχύει 2(ΡΑΓ) = 3(ΡΒΓ), να υπολογίσετε το λόγο $\frac{(B\Delta\Gamma)}{(A\Delta\Gamma)}$.

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} > 90^\circ$ και πλευρά ΒΓ = R, όπου R είναι η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του. Αν Ε είναι το εμβαδό του τριγώνου και μ_α είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά ΒΓ, να αποδείξετε ότι

$$\mu_\alpha^2 = \frac{1}{4}R^2 + 2E\sqrt{3}$$

4. Αν x, y, z είναι θετικοί ακέραιοι με

$$\text{ΜΚΔ}(x, y, z) = 1 \text{ και } \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z},$$

να αποδείξετε ότι ο αριθμός x + y είναι τέλειο τετράγωνο.