Θαλής Γ' Λυκείου 2005-2006

1. Έστω k μη μηδενικός πραγματικός αριθμός και (α_ν) μια ακολουθία θετικών αριθμών τέτοιων ώστε να ισχύει

$$(\alpha_{\nu+1})^2 + \alpha_{\nu+1} = k((\alpha_\nu)^2 + \alpha_\nu) + (k-1)\alpha_{\nu+1}\alpha_\nu$$

για κάθε ν θετικό ακέραιο. Να αποδειχτεί ότι η ακολουθία (α_ν) είναι γεωμετρική πρόοδος.

2. Για ακέραιους m και n, να αποδειχτεί ότι αν ο αριθμός $m^2 + 28\,mn + n^2$ διαιρείται δια του 13, τότε ο αριθμός $m^3 + n^3$ διαιρείται δια του 13.

3. Έστω $X\hat{O}Y$ μια κυρτή γωνία, P εσωτερικό σημείο της και C ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία O, P και τέμνει τις OX, OY, αντίστοιχα, στα σημεία A και B διαφορετικά από το O. Να αποδειχτεί ότι ο λόγος

$$\frac{AB}{PA+PB}$$

είναι σταθερός για οποιαδήποτε θέση του κύκλου C.

4. Για πραγματικούς αριθμούς α, β, γ, x τέτοιους ώστε $\alpha<\beta$, $\gamma<x$, $x>\frac{\alpha+\gamma}{2}$, να αποδειχτεί ότι

$$\frac{x-\gamma}{\beta-\alpha}+\frac{x-\alpha}{\beta-\gamma}+\frac{\beta-x}{2x-\alpha-\gamma}\geq\frac{3}{2}.$$