



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
67<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
“Ο ΘΑΛΗΣ”  
ΣΑΒΒΑΤΟ, 9 ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΥ 2006

### Γ' τάξη Λυκείου

1. Έστω συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με την ιδιότητα  
 $f(f(x+y)) = x - f(y)$  για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε  
ότι η  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $h(x) = f(x) + f(-x)$  είναι σταθερή.

2. Να βρείτε τις ακέραιες λύσεις της εξίσωσης

$$3^{x+1} - x \cdot 3^x - 4x - 1 = 0.$$

3. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί  $z_1, z_2$  και  $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{|z_1|^2}{\sigma \nu^2 \theta} + \frac{|z_2|^2}{\eta \mu^2 \theta} \geq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(\overline{z_1} z_2).$$

4. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ και τα σημεία Κ, Λ, Μ προς το ίδιο μέρος της ευθείας ΒΓ.

Αν  $B\hat{K}\Gamma = B\hat{\Lambda}\Gamma = B\hat{M}\Gamma$ , τότε να αποδείξετε ότι δύο τουλάχιστον από τα γινόμενα  $KB \cdot K\Gamma$ ,  $LB \cdot L\Gamma$  και  $MB \cdot M\Gamma$  είναι άνισα.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ