



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
68<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
“Ο ΘΑΛΗΣ”  
ΣΑΒΒΑΤΟ, 24 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2007

## Α΄ τάξη Λυκείου

### Πρόβλημα 1

Δύο παιδιά συζητούν για αλγεβρικά προβλήματα.

Ο Γιάννης λέει στη Μαρία: Έχω σκεφτεί δύο ακέραιους αριθμούς  $x$  και  $y$  που είναι τέτοιοι ώστε, αν μειώσω τον  $x$  κατά 50 και αυξήσω τον  $y$  κατά 40, τότε το γινόμενο τους δεν μεταβάλλεται.

Η Μαρία ρωτάει το Γιάννη: Αν αυξήσεις τον αριθμό  $x$  κατά 100 και μειώσεις τον αριθμό  $y$  κατά 20, τότε πάλι το γινόμενο τους δεν μεταβάλλεται;

Ο Γιάννης απαντάει: Πράγματι, αυτό ισχύει.

Η Μαρία καταλήγει: Τότε γνωρίζω τους αριθμούς που σκέφθηκες.

Έχει δίκιο η Μαρία; Εσείς μπορείτε να βρείτε τους αριθμούς που σκέφθηκε ο Γιάννης;

### Πρόβλημα 2

Αν  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  με  $(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha) \neq 0$  τότε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{(\alpha - 1)(\alpha + 1)}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} + \frac{(\beta - 1)(\beta + 1)}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)} + \frac{(\gamma - 1)(\gamma + 1)}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}$$

### Πρόβλημα 3

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$  και  $\hat{A} = 45^\circ$ . Φέρουμε ευθεία  $\varepsilon$  κάθετη προς την  $A\Gamma$  στο  $A$  η οποία τέμνει την προέκταση της  $\Gamma B$  στο  $E$ . Πάνω στην ευθεία  $\varepsilon$  παίρνουμε σημείο  $\Delta$  τέτοιο ώστε  $A\Delta = A\Gamma$  με το σημείο  $A$  να βρίσκεται μεταξύ των  $E$  και  $\Delta$ . Να υπολογίσετε συναρτήσει της πλευράς  $A\Gamma = \beta$ :

- (α) το εμβαδόν του τετραπλεύρου  $AB\Gamma\Delta$ ,
- (β) το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος  $AE$ .

### Πρόβλημα 4

Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί  $x, y$  που ικανοποιούν τη σχέση:

$$x^6 + 2x^3y^2 + 3x^3 + y^4 + 3y^2 - 40 = 0$$