



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2009

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^ο

Αν α, β είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{4\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha+\beta} \leq \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \cdot \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O, R)$. Αν A_1, B_1, Γ_1 είναι τα μέσα των πλευρών του $B\Gamma, A\Gamma, AB$ αντίστοιχα και A_2, B_2, Γ_2 είναι τα μέσα των $OA, OB, O\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το εξάγωνο $A_2B_1\Gamma_2A_1B_2\Gamma_1$ έχει τις πλευρές του ίσες και ότι οι διαγωνίες του A_1A_2, B_1B_2 και $\Gamma_1\Gamma_2$ περνάνε από το ίδιο σημείο.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3^ο

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y με $x \geq 2009$ και $y \geq -2009$ ισχύει ότι:

$$\sqrt{x-2009} + \sqrt{y+2009} = \frac{x+y}{2} + 1,$$

να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$A = \frac{x-y+2}{2}.$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4^ο

Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} (x+y)^3 = z-2x-y \\ (y+z)^3 = x-2y-z \\ (z+x)^3 = y-2z-x \end{cases} \quad (\Sigma),$$

στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ