



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
70^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2009

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^ο.

Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι x, y που να επαληθεύουν την εξίσωση

$$2x^2 + 3x(x-2) + 11x - 10y = 2015$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2^ο

Για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$f(x - f(y)) - f(y - f(x)) = 2f(f(x) - f(y)),$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f(x - f(x)) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνονται τρεις θετικοί ακέραιοι αριθμοί με δεκαδική αναπαράσταση της μορφής $\alpha \underbrace{000 \dots 000}_{2\nu-ψηφία} \alpha$, όπου α είναι θετικός μονοψήφιος ακέραιος και μεταξύ του πρώτου και

του τελευταίου ψηφίου του αριθμού $\alpha 00 \dots 00 \alpha$, μεσολαμβάνουν 2ν το πλήθος μηδενικά.

Να αποδείξετε ότι: “ή ένας από αυτούς θα διαιρείται με το 33 ή το άθροισμα κάποιων από αυτούς θα διαιρείται με το 33”.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4^ο.

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O, R)$ και έστω A_1, B_1, Γ_1 τα μέσα των

πλευρών του $B\Gamma, A\Gamma, AB$ αντίστοιχα. Θεωρούμε τους κύκλους $C_1(A_1, \frac{R}{2})$, $C_2(B_1, \frac{R}{2})$ και

$C_3(\Gamma_1, \frac{R}{2})$. Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι C_1, C_2, C_3 περνάνε από το ίδιο σημείο (έστω N) και

ότι τα δεύτερα κοινά σημεία τους είναι τα μέσα A_2, B_2, Γ_2 των $OA, OB, O\Gamma$ αντίστοιχα. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι οι $A_1A_2, B_1B_2, \Gamma_1\Gamma_2$ και ON περνάνε από το ίδιο σημείο.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ