



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
71^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 30 ΟΚΤΩΒΡΙΟΥ 2010

Β' Λυκείου

1. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z ισχύουν οι ισότητες

$$\sqrt{x^2 - y - z} = x - 2$$

$$\sqrt{y^2 - z - x} = y - 2$$

$$\sqrt{z^2 - x - y} = z - 2,$$

να αποδείξετε ότι $x + y + z = 6$ και να προσδιορίσετε τους αριθμούς x, y, z .

2. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και οι κύκλοι $c_1(A, AB)$ (με κέντρο το σημείο A και ακτίνα $R_1 = AB$) και $c_2(A, A\Gamma)$ (με κέντρο το σημείο A και ακτίνα $R_2 = A\Gamma$). Ο κύκλος $c_1(A, AB)$ τέμνει την ευθεία $B\Gamma$ στο σημείο E και την ευθεία AB στο σημείο Δ . Ο κύκλος $c_2(A, A\Gamma)$ τέμνει την ευθεία $B\Gamma$ στο σημείο K και την ευθεία $A\Gamma$ στο σημείο N .

α. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔEKN είναι ορθογώνιο.

β. Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $\Gamma A = \Gamma B$ και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔEKN είναι τετράγωνο.

3. Αν για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει ότι $x + y = 4$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{(2x+1)^2}{x} + \frac{(2y+1)^2}{y} \geq 25.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και έστω E το μέσο της διχοτόμου $B\Delta$. Η εφαπτομένη του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου AEB στο σημείο A τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο M . Να αποδείξετε ότι η ευθεία ME και η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$, τέμνονται πάνω στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $AB\Gamma$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ