



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
72^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
19 Νοεμβρίου 2011

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να λυθεί στους πραγματικούς αριθμούς η εξίσωση

$$(x^2 + 3x + 2)^4 + (x^2 + x - 2)^4 = 16(x + 2)^4.$$

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε την τιμή της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$, αν το σύστημα

$$\left\{ \alpha(x^2 + y^2) + 2x + y = \lambda, \quad 2x - y = -\lambda \right\} \quad (\Sigma)$$

έχει λύση στο \mathbb{R} , για κάθε τιμή της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$.

Πρόβλημα 3

Η ακολουθία $a_n, n = 0, 1, 2, \dots$ είναι τέτοια ώστε η ακολουθία $d_n = a_n - a_{n-1}$, με $n = 1, 2, 3, \dots$ είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\omega = a_1 - a_0$.

1. Να προσδιορίσετε, συναρτήσει των a_0, ω και n τον γενικό όρο a_n και το άθροισμα $S_{n+1} = a_0 + a_1 + \dots + a_n$.
2. Αν είναι $a_0 = 1$ και $a_1 = 7$, να προσδιορίσετε τον ελάχιστο θετικό ακέραιο n για τον οποίο συναληθεύουν οι ανισώσεις: $a_n > 10^3$ και $S_{n+1} \leq 8 \cdot 10^3$.

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma < B\Gamma$, εγγεγραμμένο σε κύκλο (c) και Δ τυχόν σημείο της πλευράς $B\Gamma$. Η διχοτόμος της γωνίας \hat{B} , τέμνει τον κύκλο (c) στο σημείο Σ , τη διχοτόμο της γωνίας $A\hat{\Delta}B$ στο σημείο K και τη διχοτόμο της γωνίας $A\hat{\Delta}\Gamma$ στο σημείο M . Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$, τέμνει τον κύκλο (c) στο σημείο T , τη διχοτόμο της γωνίας $A\hat{\Delta}\Gamma$ στο σημείο Λ και τη διχοτόμο της γωνίας $A\hat{\Delta}B$ στο σημείο N . Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα σημεία A, I, Λ, M και A, I, K, N , όπου I το έκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$, είναι ομοκυκλικά σε δύο διαφορετικούς κύκλους, έστω (c_1) και (c_2) , αντίστοιχα.
- β) Αν η $A\Delta$ ταυτιστεί με το ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$ που αντιστοιχεί στη κορυφή A , τότε οι κύκλοι (c_1) και (c_2) είναι ίσοι μεταξύ τους.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες

Καλή επιτυχία!