



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
20 Οκτωβρίου 2012

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν $\alpha \neq 0$ και $-1 < \alpha < 1$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης

$$K = \frac{A}{B} - 1 + \alpha,$$

όπου

$$A = \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} + \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}, \quad B = \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} - \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}.$$

Πρόβλημα 2

Δίνεται η εξίσωση :

$$x^2 - 2\kappa x - 1 + \kappa^2 = 0.$$

Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου κ για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες στο διάστημα $(0, 5)$ με άθροισμα τέταρτων δυνάμεων ίσο με 82.

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε τους μη μηδενικούς ακέραιους x, y και z για τους οποίους ισχύει ότι

$$\frac{x}{2012x+3} = \frac{y}{2012y+5} = \frac{z}{2012z+7}$$

και το άθροισμα των τετραγώνων των x, y και z είναι διαιρέτης του 747.

Πρόβλημα 4

Δίνεται κύκλος $c(O, R)$, τυχούσα χορδή του AB (όχι διάμετρος) και τυχόν σημείο M του μικρού τόξου AB . Οι κύκλοι $c_1(A, AM)$ και $c_2(B, BM)$ τέμνουν το κύκλο $c(O, R)$ στα σημεία K και N , αντίστοιχα. Οι κύκλοι $c_1(A, AM)$ και $c_2(B, BM)$ τέμνονται στο σημείο T . Να αποδείξετε ότι το σημείο T είναι το σημείο τομής των διχοτόμων του τριγώνου KMN .

*Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες*

Καλή επιτυχία!