



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
73^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
20 Οκτωβρίου 2012

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους θετικούς ακέραιους την εξίσωση

$$\frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \dots + \frac{1}{1+2+3+4+\dots+x} = \frac{2011}{2013}.$$

Πρόβλημα 2

Αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = ax^2 + bx + c$ και $g(x) = cx + b$, όπου $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο, έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, να βρείτε τη συνθήκη που ισχύει μεταξύ των παραμέτρων a, b, c καθώς και το κοινό σημείο των δύο γραφικών παραστάσεων.

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς x, y και z για τους οποίους ισχύει ότι

$$\frac{x}{2012x+y} = \frac{y}{2012y+z} = \frac{z}{2012z+7}$$

και το άθροισμα των τετραγώνων των x, y και z ισούται με 147.

Πρόβλημα 4

Δίνεται κύκλος $c(O, R)$, τυχούσα χορδή του BC (όχι διάμετρος) και τυχόν σημείο M του μικρού τόξου BC . Οι κύκλοι $c_1(B, BM)$, $c_2(C, CM)$ τέμνουν το κύκλο $c(O, R)$ στα σημεία K, N , αντίστοιχα, και οι κύκλοι $c_1(B, BM)$, $c_2(C, CM)$ τέμνονται στα σημεία A και M . Η παράλληλος από το σημείο M προς την BC τέμνει τους κύκλους $c_1(B, BM)$, $c_2(C, CM)$ στα σημεία T, S , αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες AM, KT, NS περνάνε από το ίδιο σημείο.

*Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες*

Καλή επιτυχία!