



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
74<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
“Ο ΘΑΛΗΣ”  
19 Οκτωβρίου 2013

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

**Πρόβλημα 1**

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση

$$2x^2 - 5x - 2x\sqrt{x^2 - 5x} = 1.$$

**Πρόβλημα 2**

Αν  $\alpha, \beta$  ακέραιοι και ο αριθμός  $A = \alpha^2 + 2\beta$  είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου, να αποδείξετε ότι ο αριθμός  $B = \alpha^2 + \beta$  ισούται με το άθροισμα δύο τέλειων τετραγώνων ακεραίων αριθμών.

**Πρόβλημα 3**

Βρείτε για ποιες τιμές της πραγματικής παραμέτρου  $a$  η εξίσωση

$$4x^4 + (8 + 4a)x^3 + (a^2 + 8a + 4)x^2 + (a^3 + 8)x + a^2 = 0$$

έχει όλες τις ρίζες της πραγματικούς αριθμούς.

**Πρόβλημα 4**

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  (με  $AB < A\Gamma < B\Gamma$ ) εγγεγραμμένο σε κύκλο  $C(O, R)$  (με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $R$ ) και ευθεία  $(\varepsilon)$  που περνάει από την κορυφή  $A$  και είναι παράλληλη στη πλευρά  $B\Gamma$ . Ο κύκλος  $C_B(B, AB)$  (με κέντρο  $B$  και ακτίνα  $AB$ ), τέμνει την  $(\varepsilon)$  στο σημείο  $K$  και τον κύκλο  $C(O, R)$  στο σημείο  $L$ . Ο κύκλος  $C_\Gamma(\Gamma, A\Gamma)$  (με κέντρο  $\Gamma$  και ακτίνα  $A\Gamma$ ), τέμνει την  $(\varepsilon)$  στο σημείο  $N$  και τον κύκλο  $C(O, R)$  στο σημείο  $M$ . Οι κύκλοι  $C_B(B, AB)$ ,  $C_\Gamma(\Gamma, A\Gamma)$  τέμνονται στο σημείο  $T$  και η  $(\varepsilon)$  τέμνει τον  $C(O, R)$  στο σημείο  $\Sigma$ .

(α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία  $\Gamma, L, N, T$  είναι συνευθειακά.

(β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες  $T\Sigma, K\Gamma, NB$  περνάνε από το ίδιο σημείο.

*Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες*  
*Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες*

*Καλή επιτυχία!*