



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
76^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΘΑΛΗΣ”
14 Νοεμβρίου 2015

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Στο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy θεωρούμε τις υπερβολές με εξισώσεις $y = \frac{1}{x}$ και $y = -\frac{1}{x}$. Μία ευθεία ε τέμνει τον κλάδο της υπερβολής $y = \frac{1}{x}$ που

βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο των αξόνων στα σημεία $A\left(\alpha, \frac{1}{\alpha}\right)$, $B\left(\beta, \frac{1}{\beta}\right)$,

και τους δύο κλάδους της υπερβολής $y = -\frac{1}{x}$ στα σημεία $\Gamma\left(\gamma, -\frac{1}{\gamma}\right)$ και $\Delta\left(\delta, -\frac{1}{\delta}\right)$

με $\gamma < 0 < \beta < \alpha < \delta$. Να αποδείξετε ότι:

(i) $\alpha + \beta = \gamma + \delta$

(ii) τα τρίγωνα OAG και OBD έχουν ίσα εμβαδά.

Πρόβλημα 2

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση

$$\sqrt{3x^2 - 3x + 4} + \sqrt{x^2 + 3} = \sqrt{2x^2 - 3x + 5} + \sqrt{2x^2 + 2}.$$

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε τους μη-αρνητικούς ακεραίους x, y που ικανοποιούν την εξίσωση $x^3 + y^3 - x - y = pq$, όπου p, q πρώτοι αριθμοί.

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABC (με $AB < AC < BC$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O, R)$ και έστω D, E τα μέσα των AB και AC αντίστοιχα. Έστω T τυχόν σημείο του μικρού τόξου BC και (c_1) , (c_2) οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων BDT και CET αντίστοιχα. Οι κύκλοι (c_1) και (c_2) τέμνουν την BC στα σημεία L και K . Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $DELK$ είναι παραλληλόγραμμο.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Καλή επιτυχία!

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες